Clase 12: Integración de funciones de varias variables con valores reales

C.J. Vanegas

2 de junio de 2008

Recordemos 0.1. *La integral* $\int_a^b f(x)dx$*, para* $f \geq 0$ *representa el área bajo la gráfica de* f*.*

Similarmente si tenemos una función de dos variables: $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $R = [a, b] \times [c, d]$ y $f(x, y) \geq 0$ en R entonces
$\iint_R f(x, y)dxdy$ o $\iint_R f(x, y)dA$ representa el volumen de la región que está arriba de R y debajo de la gráfica de f

A este volumen se le llama integral doble de f sobre R.

Ejemplo 1. *Sea* $f(x, y) = h$*,* $h > 0$*.* $R = [a, b] \times [c, d]$*, entonces* $\iint_R f(x, y)dA = \iint hdA = h(b - a)(d - c)$ *pues la integral es igual al volumen de :*

DIBUJO

1. Principio de Cavalierí (Método útil para calcular volúmenres)

Sea S un Sólido.

Suponga que para $a \leqslant x \leqslant b$, P_x es una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.

2. El área de la sección transversal de S cortada por P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a $\int_a^b A(x)dx$.
Sea P la partición: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$.
Entonces una aproximación al volumen de S en este subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es el volumen de una rebanada con área de seccioón transversal $A(x)$ y ancho $\Delta x = x_k - x_{k-1} : \Delta V_k = A(x_k^*)\Delta x_k$

DIBUJO

y así una aproximación al volumen de S en $[a, b]$ es :

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

y el voluem exacto es:

$$V = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b A(x)dx.$$

Donde $\|p\| = Longituddelsubintervalomayor.$
Ahora consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ definida en $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y mayor que cero.

DIBUJO

El área $A(x_0)$ de la sección transversal es el área de la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_0, y)$ para $y \in [c, d]$ cuyo valor viene dado por:

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy$$

. Luego, obtenemos la función $A(x)$ de área transversal con dominio $[a, b]$:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

y por el principio de cavalierí el volumen del sólido es:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

En conclusión:

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \tag{1}$$

y si usamos planos que corten perpendicularmente al eje y obtenemos:

$$V=\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy. \tag{2}$$

Ejemplo 2. *Evaluar* $\displaystyle\int_{-1}^3\int_1^2\left(6xy^2-\frac{4x}{y}\right)dydx$

Solución 1. $\displaystyle\int_{-1}^3\int_1^2\left(6xy^2-\frac{4x}{y}\right)dydx=\int_{-1}^3\left[\frac{6xy^3}{3}-4x\ln y|_1^2\right]dx=\int_{-1}^3[2x(2)^3-4x\ln 2-2x]dx=\int_{-1}^3(14x-4x\ln 2)dx=\left[\frac{14x^2}{2}-\frac{4x^2}{2}\ln 2\right]|_{-1}^3=56-16\ln 2.$

Si evaluamos $\displaystyle\int_1^2\int_{-1}^3\left(6xy^2-\frac{4x}{y}\right)dxdy$ *obtenemos el mismo valor:*

$\displaystyle\int_1^2\int_{-1}^3\left(6xy^2-\frac{4x}{y}\right)dxdy=\int_1^2\left[\left(3x^2y^2-\frac{2x^2}{y}\right)|_{-1}^3\right]dy=\int_1^2\left(24y^2-\frac{16}{y}\right)dy=(8y^3-16\ln y)|_1^2=56-16\ln 2.$

Ejemplo 3. *Hallar el volumen acotado por la gráfica de* $f(x,y)=1+2x+3y$*, el rectángulo* $[1,2]\times[0,1]$ *y los cuatro lados verticales del rectángulo* R

Solución 2.

$$V=\int_1^2\int_0^1 f(x,y)dydx=\int_1^2\int_0^1(1+2x+3y)dydx=\int_1^2\left(y+2xy+3\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1dx=$$

$$\int_1^2\left(\frac{5}{2}+2x\right)dx=\left(\frac{5x}{2}+2x^2\right)\Bigg|_2^1=\frac{11}{2}$$

2. Definición de la integral doble

2.1. Partición de un rectángulo

Sea $R\subset\mathbb{R}^2$ un rectángulo cerrado: $R=[a,b]\times[c,d]$.

Suponga $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ y $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ tales que $\underbrace{x_{j+1}-x_j}_{\Delta x}=\dfrac{b-a}{n}$, $\underbrace{y_{k+1}-y_k}_{\Delta y}=\dfrac{d-c}{n}$. Entonces las colleciones de puntos $\{x_j\}_{j=0}^n$ y $\{y_k\}_{k=0}^n$ con estas propiedades reciben el nombre de partición de orden n de R.

DIBUJO

2.2. Sumas de Riemann.

Sea R_{jk} el rectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ y Sea $c_{jk} \in R_{jk}$. Suponga que $f : R \to \mathbb{R}$ es una funció acotada.
Entonces la suma

$$Sn = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\Delta A} = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A$$

Se llama suma de Riemann para f.

Observación 1. *$f(x, y)$ es acotada si existe $M > 0$ tal que $-M \leqslant f(x, y) \leqslant M \quad \forall (x, y) \in Dom(f)$.*
Una función continua en un recatángulo cerrado siempre es acotada.
Observe que podemos considerar la sucesión $\{S_n\}$

2.3. Integral doble

Considere $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A$, en ese caso escribimos:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A = \iint_R f(x, y) \underbrace{dA}_{dxdy}$
(para cualquier elcción de $c_{jk} \in R_{jk}$)

* Cualquier función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.
* Significado geométrico de $\lim\limits_{n\to\infty} Sn = \iint_R f(x, y) dA$, si $f(x, y) \geqslant 0$:
  Considere la gráfica de $z = f(x, y)$ como la tapa de un sólido cuya base es R. tome cada c_{jk} como el punto en R_{jk} en donde $f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ es el volumen de una cara rectangular con base R_{jk}

  DIBUJO

  La suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ es igual al volumen de un sólido inscrito Similarmente, si c_{jk} es el punto donde $f(x, y)$ tiene su máximo en R_{jk}, entonces la suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ es igual al volumen de un sólido circunscrito.

  DIBUJO

  Por tanto si existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ y es independiente de $c_{jk} \in R$, se deduce que los volúmenes de los sólidos inscritos y circunscritos tienden al mismo límite cuando $n \to \infty$. Es razonalbe entonce llamar a este límite el volumen exacto del sólido bajo la gráfica de f.

2.4. Integrabilidad de funciones acotadas

Sea R un rectángulo y $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Suponga que el conjunto de puntos donde f es discontinua está formado por una unión finita de gráficas de funciones continua. Entonces f es integrable sobre R.

DIBUJO

Otros conjuntos de discontinuidades podrían ser:

DIBUJO

2.5. Propiedades de $\iint_R f(x,y)dA$

Sean f y g funciones integrables en el rectángulo R y sea c una constante. Entonces $f+g$ y cf son integrables y

i $\iint_R (f+g)dA = \iint_R fdA + \iint_R gdA$. (Linealidad)

ii $\iint_R cfdA = c\iint_R fdA$. (homogeneidad)

iii Si $f \geqslant g$ entonces $\iint_R fda \geqslant \iint_R gdA$. (monotonían)

iv Sean $R_1, ..., R_m$ m rectángulos que no se interesectan salvo quizás en puntos de su frontera.

Suponga que f es acotada e integrable en cada R_i y $Q = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ es un rectángulo, entonces $f : Q \to \mathbb{R}$ es intgrable en Q y $\iint_Q fdA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} fdA$. (aditividad)

v $\left|\iint_R fdA\right| \leqslant \iint_R |f|dA$.

Demostración : Vamos a demostrar iii) Suponga que $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} h(c_{jk})\Delta A$ y $h \geqslant 0$ entonces es claro que $S_n \geqslant 0 \quad \forall n$ luego $\iint_R h(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} S_n \geqslant 0$.
Aplique esto a $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ y use i) y ii).

Ahora probaremos v)

Como $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow \iint_R |f|dA \leqslant \iint_R f dA \leqslant \iint_R |f|dA \Rightarrow \left|\iint_R f dA\right| \leqslant \iint_R |f|dA$ $\square$

A menudo es posible reducir una integral doble sobre un rectángulo a integrales iteradas simples que podamos resolver. El teorema de Fubini justifica esto.

Teorema 1. *Sea f una función continua con dominio R, $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \iint_R f(x, y)dA$$

Demostración : Sean $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ partición de R de orden n.

Definimos $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$. entonces $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)dy \underbrace{=}_{(*)} \sum_{k=0}^{n-1} f(x, y_k(x))\Delta y$

tal que $y_k(x) \in [y_k, y_{k+1}]$.

$(*)$ = Teorema del valor medio para integrales.

Por otro lado $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_a^b F(x)dx \underbrace{=}_{(*)} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)\Delta x$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(p_j, y_k(x))\Delta y \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} F(c_{jk})\Delta A = \iint_R f(x, y)dA$

tal que: $p_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $c_{jk} = (p_j, y_k(x))$ y $\Delta x \Delta y = \Delta A$.

Por lo tanto $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \iint_R f(x, y)dA$.

Similarmente se prueba que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \iint_R f(x, y)dA$$

. $\square$

2.6. Una versión más general del teorema de Fubini

Sea f una función acotada con dominio $R : [a, b] \times [c, d]$ y suponga que las discontinuidades de f se encuentran sobre una uniónes finitas de gráficas de funciones continuas. Si la integral $\displaystyle\int_c^d f(x, y)dy$ existe para cada $x \in [a, b]$ entonces:

$\displaystyle\int_a^b \left[\int_a^b f(x, y)dy\right] dx$ existe y $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \iint_R f dA$.

Similarmente, si $\displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$ existe para cada $y \in [c, d]$ entonces $\displaystyle\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy$ existe y $\displaystyle\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \iint_R f dA.$

Además, si todas estas condiciones secumplen simultáneamente, entonces:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \iint_R f dA.$$

Ejemplo 4. *Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie* $z = \sin(y)$, *los planos* $x = 1$, $x = 0\, y = o$ *e* $y = \dfrac{\pi}{2}$ *y el plano* xy.

Solución 3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)dydx = \int_0^1 (-\cos(y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^1 dx = 1.$

Observación 2.

- *Una consecuencia del teorema de Fubini es que al intercambiar el orden de integración en las integrales iteradas, el resultado es el mismo.*
- *Si* f *toma valores negativos, la integral doble se puede pensar como la suma de todos los colúmenes que están entre la superficie* $z = f(x,y)$ *y el plano* $z = 0$, *acotados por los planos* $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. *Los volúmenes arribade* $z = 0$ *se cuentan como positivos y los de abajo como negativos. Aefectos de hacer el cálculo, puede aplicarse sin problemas el teorema de Fubini.*
  (ver ejemplo 3 *pagina* 313*).*